Systheo II Formelsammlung

Wahrscheinlichkeit

(i) $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$

(ii) *) $P(A) \geq 0$

*) $P(\Omega) = 1$

*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ wenn $A \cap B = \emptyset$

Eigenschaften (E1):

*) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

*) $P(\emptyset) = 0$

*) $0 \leq P(A) \leq 1$

*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

*) Gleichverteilung $\rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Bedingte Wkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Eigenschaften: *) (E1)

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ⇐ *) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

*) $P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}$ … Bayes

*) $B \subseteq A \rightarrow P(A|B) = 1$

*) Totale Wkeit: 1) Wenn $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

2) $A \subset (\bigcup B_i)$

$\downarrow$

$P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

Statist. Unabhängigkeit:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eig.: *) $P(A|B) = P(A)$

*) $\bar{A}$ und B, A und $\bar{B}$, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ $\Big\}$ unabh.

Zufallsvariablen

ZV: Eigenschaften: *) $\{X \leq -\infty\} = \emptyset$

*) $\{X \leq \infty\} = \Omega$

Typen: 1) kont. ZV: *) $F_X(x)$ überall stetig

$\hookrightarrow P(X = x) = 0$

*) $f_X(x)$ überall endlich

2) diskrete ZV: *) $F_X(x)$ Treppenfkt.

(vollst. durch $(x_i, P(X_i))$ bestimmt)

*) $f_X(x) = \sum p_i \, \delta(x - x_i)$ $\quad p_i = P(X = x_i)$

Verteilungsfkt: $F_X(x) = P(X \leq x)$

Eig.: *) $F_X(-\infty) = 0$

*) $F_X(\infty) = 1$

*) $F_X(x)$ monoton steigend + stetig von rechts

*) $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$

*) $1 - F_X(x) = P(X > x)$

Dichtefkt: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

Eig.: *) $f_X(x) \geq 0 \ \forall x$

*) $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$

*) $\int_{-\infty}^{x} f_X(z)dz = F_X(x)$

*) $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = P(x_1 < X \leq x_2)$

*) $P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f_X(x) \Delta x$ für $\Delta x \ll 1$

Bedingte Dichte & Verteilungsfkt.

$F_X(x|B) = \frac{P(X \leq x \cap B)}{P(B)}$

$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$

Totale Wkeit: 1) ✓ 2) ✓

$\downarrow$

$\left\{ \begin{matrix} F_X \\ f_X \end{matrix} \right\}(x) = \sum_i \left\{ \begin{matrix} F_X \\ f_X \end{matrix} \right\}(x|B_i) \cdot P(B_i)$

Bayes: $F_X(x|B) = P(B|X \leq x) \frac{F_X(x)}{P(B)}$

$f_X(x|B) = P(B|X = x) \frac{f_X(x)}{P(B)}$

(a posteriori W'keit)

Symmetr. Dichte $f_X(x) = f_X(-x)$

Eig.: *) $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

*) $P(|X| \leq x) = 2F_X(x) - 1$

*) $P(|X| > x) = 2 - 2F_X(x)$

Momente

Erwartungswert $\mu = E[X] := \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$

*) diskret: $\mu = \sum_i p_i x_i$

*) bedingt: $E[X|B] = \int x f_X(x|B)dx$

$\sum P(X = x_i|B) x_i$

*) einer Fkt: $E[g(X)] = E[Y]$

$= \int y f_Y dy$ Mgl. 1

$= \int g(x) f(x) dx$ Mgl. 2

Eig.:

*) $E[\sum_i c_i g_i(X)] = \sum c_i E[g_i(X)]$

*) c deterministisch $\rightarrow E[c] = c$

Fkt. einer ZV

$Y(\xi) = g(X)$

Direkte Methode: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{D_y} f_X(x)dx$

Syst. Methode: 1) $\forall$ $y = g(x)$, löse nach $x_i = g^{-1}(y)$

2) $f_Y(y) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} f_X(x_i)$

Höhere Momente

n-tes Moment: $m_n = E[X^n] = \int x^n f_X(x)dx$

($n \in (2k+1) \cap f_X(x) = f_X(-x)$

$\hookrightarrow m_n = 0$)

n-tes zentrales m.: $\gamma_n = E[(X-\mu)^n] = \int (x-\mu)^n f_X(x)dx$

$(\gamma_1 = 0)$

Spezialfälle

$m_1 = E[\,]$ … Erwartungsw…

$\gamma_2 = Var[X] = \sigma^2$ … Varian…

$\sigma = \sqrt{Var[X]}$ … Standardabwei…

Tschebysheff-Ungleichung:

$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var(X)$

Zusammenhang $m \Leftrightarrow \gamma$

$E[X^2] = \gamma^2 + \mu^2$

$\rightarrow Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k \mu^{n-k}$

Momenterzeugende Fkt.: $\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} f_X(x)\,dx = \sum_i p_i e^{sx_i}$ $\qquad f_X(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_X(-s)$

Charakteristische Fkt.: $\phi_X(s)|_{s=j\omega} = E[e^{j\omega X}]$ $\qquad f_X(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \phi_X(-j\omega)$

Momenttheorem: $E[X^n] = \frac{d^n \phi_X(s)}{ds^n}\Big|_{s=0}$

Mehrere ZV

Zwei ZV: $F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$

Marginal Fkt: $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$ (analog mit y)

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy$ (analog mit y)

Eig.:
- $F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty,y) = 0$
- $F_{XY}(\infty,\infty) = 1$
- monoton + von rechts stetig (in x und y)
- $F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y) = P(x_1 \le X \le x_2, Y \le y)$ (analog mit y_1/y_2)
- $F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1) = P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2)$

- $f_{XY}(x,y) \ge 0$
- $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(z,w)\,dz\,dw$
- $\iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f_{XY}\,dx\,dy = 1$
- $P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f_{XY}\,dx\,dy$

$E[Y|X] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x)\,dy$

Zufallsvektor $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$

Verteilung $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X}(\xi) \le \underline{x})$

Dichte $f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} F_{\underline{X}}(\underline{x})$

Stoch. Unabh.: $F_{XY} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

$f_{XY} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\downarrow$

- $f_{\underline{X}}(\underline{x}|\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{x})$
- $\underline{g}(\underline{X})$ und $h(\underline{Y})$ stoch. unabh.

$E[XY] = \int_{\mathbb{R}} xy\, f_{XY}$

$E[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} \frac{x \cdot f_{XY}}{f_Y(y)}\,dx$

Bedingt: $F_{\underline{X}}(\underline{x}|B) = \frac{P(\underline{X} \le \underline{x}, B)}{P(B)}$ $\quad B = \{Y \le y\} \Rightarrow F_X(x|Y \le y) = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$

$f_{\underline{X}}(\underline{x}|B) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} F_{\underline{X}}(\underline{x}|B)$ $\quad B = \{Y = y\}$ $f_X(x|Y=y) = \frac{f_{XY}}{f_Y}$

Fkt. mehrerer ZV $\quad z = g(X,Y)$, $w = h(X,Y)$

direkte Methode:

$F_{ZW}(z,w) = P(Z \le z, W \le w) = P(g(X,Y) \le z, h(X,Y) \le w)$

syst. Methode

1) Bestimme $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{-1} \\ h^{-1} \end{pmatrix}$

2) $J(x,y) = \det \begin{bmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{bmatrix}$

3) $f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{1}{|J(x_i,y_i)|} f_{XY}(x_i,y_i)$

Mehrere Fkt.: $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X}) \in \mathbb{R}^M$, $\underline{X} \in \mathbb{R}^N$

$M = N$: $f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum \frac{1}{|J(\underline{x}_i)|} f_{\underline{X}}(\underline{x}_i)$

$M < N$: Def. Hilfsvariable

Momente

Erwartungswert: $E[g(\underline{X})] = E[\underline{Y}] = \int y f_Y\,dy = \iint g(x) f_X(x)\,dx$

Eig.:
- linear
- X,Y unabh. $\to E[X,Y] = E[X] \cdot E[Y]$ $\to g(X), h(Y)$ unabh.

Erwartungsvektor: $\underline{\mu} = E[\underline{X}] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$

Korrelationsmatrix: $\underline{\underline{R}} = E[\underline{X}\underline{X}^H] = \begin{bmatrix} X_1X_1^* & \cdots & X_1X_N^* \\ \vdots & & \vdots \\ X_NX_1^* & \cdots & X_NX_N^* \end{bmatrix}$

bzw. $r_{ij} = E[X_i X_j^*]$

Kovarianzmatrix: $\underline{\underline{C}} = E[(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})^H]$

Kovarianz bzw. $c_{ij} = E[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)]$

Varianz $c_{ii} = \sigma_i^2$

Korrelationskoeff.: $\varrho_{ij} = \frac{Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}}$

$\begin{cases} = 0 & \to X_i \text{ und } X_j \text{ unkorreliert} \\ \ne 0 & \to X_i \text{ korreliert} \\ |\varrho_{ij}| = 1 & \to X_i \text{ kohärent} \end{cases}$

Matrizen

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T \qquad (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^H = \underline{\underline{B}}^H \underline{\underline{A}}^H$

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$ (falls quadrat. + inv.)

$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}}) \cdot \det(\underline{\underline{B}})$

$\det(\underline{\underline{A}}^T) = \det(\underline{\underline{A}}) \qquad \det \underline{\underline{A}}^H = (\det(\underline{\underline{A}}))^*$

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{N \times M} \to \underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{A}}^T$

Eig.: (auch für $\underline{\underline{C}}$)
- $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{C}} + \underline{\mu}\,\underline{\mu}^H$ $\to r_{ij} = c_{ij} + \mu_i \mu_j^*$, $r_{ii} = Var(X_i) + |\mu_i|^2$
- $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^H$ ($\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R} \to$ symmetr.)
- $\underline{a}^H \underline{\underline{R}}\, \underline{a} \ge 0$ ($\underline{\underline{R}}$ nichtnegativ def.) $\to$ alle EW ≥ 0
- mit $\det(\underline{\underline{R}}) \ne 0 \to \underline{\underline{R}}$ positiv definit $\to$ alle EW > 0

① Unabhängig: $f_{XY} = f_X f_Y$

② Unkorreliert: $\underline{\underline{C}}_{XY} = \underline{\underline{0}}$

③ Orthogonal: $\underline{\underline{R}}_{XY} = \underline{\underline{0}}$

Eig.: ① $\to$ ② (② $\to$ ① + Normalverteilung)

② $+ (\mu_X / \mu_Y = 0) \to$ ③

Momenterzeugende Fkt.: $\Phi_{\underline{X}}(\underline{s}) = E[\underbrace{e^{s_1 x_1 + \dots + s_N x_N}}_{e^{\underline{s}^T \underline{x}}}] = \int \dots \int e^{\underline{s}^T \underline{x}} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$ (Mehrdimensionale Laplace)

Charakteristische Fkt.: $\Phi_{\underline{X}}(j\underline{\omega}) = \Phi_{\underline{X}}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=j\underline{\omega}}$ $\quad \underline{s} \in \mathbb{C}^N, \underline{\omega} \in \mathbb{R}^N$

Marginale momenterzeugende Fkt.:

$$\Phi_{X_i}(s_i) = \Phi_{\underline{X}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Eig.:
- Momenttheorem: $E[X_1^{k_1} \cdots X_N^{k_N}] = \dfrac{\partial^{k_1 + \dots + k_N}}{\partial^{k_1} s_1 \cdots \partial^{k_N} s_N} \Phi_{\underline{X}}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=\underline{0}}$
- X_1, X_2 unabh. $\rightarrow \Phi_{\underline{X}}(\underline{s}) = \Phi_{X_1}(x_1) \cdot \Phi_{X_2}(x_2)$

→ Sonderfall:

$E[X_1 X_2 X_3 X_4] = r_{12} r_{34} + r_{13} r_{24} + r_{14} r_{23} - 2\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$

↳ $E[X^4] = 3(\sigma^2 + \mu^2)^2 - 2\mu^4$

Zufallsfolgen: **Konvergenz:** klass. Def.: $X_n(\xi) \xrightarrow{n \to \infty} X(\xi) \;\forall \xi \in \Omega$

Zentraler Grenzwertsatz: X_i unabh., ident. verteilt, $E[X_i] = \mu < \infty$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ mit $E[S_n] = n \cdot \mu$, $Var[S_n] = n\sigma^2$

$Z_n = \dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{n \to \infty} Z \sim N(0,1)$
- $F_{Z_n}(z) \xrightarrow{n \to \infty} F_Z(z)$
- Z_n asymptotisch $N(0,1)$-verteilt
- S_n " $N(n\mu, n\sigma^2)$ "
- X_i kontinuierlich → $\lim_{n \to \infty} f_{Z_n} = f_Z$

Schwächere Version: X_i unabh., untersch. verteilt:
- $\mu_i = E[X_i] < \infty$
- $\sigma_i = Var[X_i] > a > 0$
- $E[|X_i - \mu_i|^3] < b < \infty$

} S_n asymptotisch normalverteilt

Stochastische Prozesse

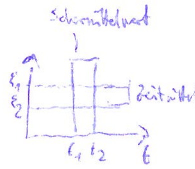
Def.: $X(t) = X(t, \xi)$

Verteilungsfkt.: $F_{X(t_1) \dots X(t_k)}(x_1, \dots, x_k) = P(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_k) \le x_k) = F_X(\underline{x}; \underline{t})$

Dichte: $f_X(\underline{x}; \underline{t}) = \dfrac{\partial^k}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} F_X(\underline{x}; \underline{t})$

2 SP: $F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{t}, \underline{\tau})$

[$r_{YY}(\tau) = E[Y(t+\tau) Y(t)]$]



←

Momente:
- deterministischer Anteil (1. Moment): $\mu(t) = E[X(t)] = \int x \, f_X(x;t) dx$
- 2. Moment: $r(t_1, t_2) = E[X(t_1) X^*(t_2)] = \iint x_1 x_2^* f_X \, dx_1 dx_2$, $\quad r(t,t) = E[|X(t)|^2]$ } Korrelationsfkt.

$c(t_1, t_2) = Cov[X(t_1), X(t_2)] = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))^*]$

$c(t,t) = E[|X(t) - \mu(t)|^2] = Var[X(t)] = \sigma^2(t)$ } Kovarianzfkt.

$r_{AB}(t) = E[A(t+\tau) C^*(\tau)]$

$r_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y^*(t_2)]$ Kreuzkorrelationsfkt.

$C_{XY}(t_1, t_2) = Cov[X(t_1), Y(t_2)]$ Kreuzkovarianzfkt.

Eigenschaften: $r(t_1, t_2) = c(t_1, t_2) + \mu(t_1)\mu^*(t_2) = r^*(t_2, t_1)$

$r_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t_1, t_2) + \mu_X(t_1)\mu_Y^*(t_2) = c^*(t_2, t_1)$

Stationarität
- i.e.S.: $F_X(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = F_X(\underline{x}; \underline{t} + t_0)$

Eig.: $F_X(x, t) = F_X(x)$
↳ $\mu(t), \sigma(t) = const.$

[aus $\mu_X = 0$ folgt: $r_{XX}(\tau) = C_{XX}(\tau)$]

zeitinvariant + gedächtnislos → Stationarität bleibt erhalten

Stationarität

1) i.e.S.: $F_X(\underline{x};\underline{t}) = F_X(\underline{x};\underline{t}+t_0)$

Eig.:
- *) $F_X(x;t) = F_X(x)$
  $\rightarrow \mu(t) = \mu$
  $\sigma^2(t) = \sigma^2$
- *) $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_X(x_1,x_2,t)$ mit $t = t_1 - t_2$
  $\rightarrow r(t_1,t_2) = r(t) = E[x(t+\tau)\, x^*(\tau)] = r^*(-t)$
  $c(t_1,t_2) = c(t) = \; ... \; = c^*(-t)$
- *) $|r(t)| \leq r(0)$

(+ Gauß-Prozess)

2) i.w.S.:
- *) $\mu(t) = \text{const.}$
- *) $r(t_1,t_2) = r(t_1 - t_2)$

Weißes Rauschen

i.e.S.: $x(t_1)$ und $x(t_2)$ unabh. $\forall\, t_1 \neq t_2$

i.w.S.: $x(t_1)$ und $x(t_2)$ unkorreliert $\forall\, t_1 \neq t_2$

$\rightarrow c_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$

Abtastung

$x(n) = x_a(nT)\;,\; n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$
- *) $\mu(n) = \mu_a(nT)$
- *) $r(n_1,n_2) = r_a(n_1 T, n_2 T)$
- *) x_a i.e.S./i.w.S. stationär $\overset{\rightarrow}{\cancel{\leftarrow}}$ $x(n)$ ...
- *) x_a " weiß $\overset{\rightarrow}{\cancel{\leftarrow}}$ $x(n)$ ...

Spektrum:

Leistungsdichte-Spektrum

Leistungsspektrum: $R(\omega) = \mathcal{F}\{r(t)\} = \int_{\mathbb{R}} r(t) e^{-j\omega t}\, dt \quad \omega \in \mathbb{R}$

$\sum_n r(n) e^{-j\omega n} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad \rightarrow r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} R(\omega) e^{j\omega n} \frac{d\omega}{2\pi}$

Kovarianzspektrum: $C(\omega) = \mathcal{F}(c(t))$

Kreuzspektrum: $R_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{r_{XY}(t)\}$

Kreuzkovarianzspektrum: $C_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{c_{XY}(t)\}$

Eig.:
- *) $R(\omega) \geq 0$
- *) $X(t) \in \mathbb{R} \rightarrow r(t), c(t)$ gerade, reell
  $\rightarrow$ $R(\omega)$ / $C(\omega)$, ω
- *) $r(0) = \int_{\mathbb{R}} R(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \;\hat{=}\;$ Gesamtleistung
  $C(0) = \int_{\mathbb{R}} C(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \;\hat{=}\;$ Wechselleistung
- *) $r(t) = c(t) + |\mu|^2 \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; R(\omega) = C(\omega) + |\mu|^2\, 2\pi\, \delta(\omega)$
  $r(n) = c(n) + |\mu|^2 \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; R(\omega) = C(\omega) + |\mu|^2\, 2\pi\, \eta(\omega)$ mit $\eta(\omega) = \sum_k \delta(\omega + 2\pi k)$

Schätzungen:

$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n)$

$\hat{c}(n) = \begin{cases} \alpha(n) \sum_{m=1}^{N-n} [x(n+m) - \hat{\mu}][x(m) - \hat{\mu}] \\ \hat{c}(-n) & n < 0 \end{cases}$

$\alpha(n) = \frac{1}{N}$ oder $\frac{1}{N-n}$

$\hat{C}(\omega) = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \hat{c}(n) e^{-j\omega n}$

$\boxed{\text{Systeme}}$ $\quad x(t,\xi) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y(t,\xi)$

*) Gedächtnislos + Zeitinvariant

$y(t) = g(x(t))$

Eig.: *) $X(t)$ $\begin{Bmatrix} \text{i.e.S.} \\ \text{i.w.S.} \end{Bmatrix}$ stationär $\begin{bmatrix} \rightarrow \\ \cancel{\leftarrow} \end{bmatrix}$ $Y(t)$ ...

*) $\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} g'(x_1) & & 0 \\ 0 & & g'(x_N) \end{bmatrix} \rightarrow f_Y(y) = \sum \frac{1}{|J|} f(x_i)$

LTI:

klass. Faltung: $y(t,\xi) = h(t) * x(t,\xi)$

Faltung i.q.M.: $y(t,\xi) = \lim_{\Delta\tau_i \to 0} \sum h(\tau_i)\, x(t-\tau_i,\xi) \cdot \Delta\tau_i$

Eig.:
- *) $X(t)$ i.e.S./i.w.S. stationär $\rightarrow Y(t)$ ...
- *) $X(t)$ Gauß-Prozess $\rightarrow Y(t)$ ...
- *) $\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t)$
  ($X(t)$ stationär $\rightarrow \mu_Y = H(0)\, \mu_X$)

*) $r_{YX}(t_1,t_2) = h(t_1) * r_{XX}(t_1,t_2)$
$r_{XY}(t_1,t_2) = h^*(t_2) * r_{XX}(t_1,t_2)$
$r_{YY}(t_1,t_2) = h(t_1) * h^*(t_2) * r_{XX}(t_1, t_2)$

*) $R_{YX}(\omega) = H(\omega)\, R_{XX}(\omega)$
$R_{XY}(\omega) = H^*(\omega)\, R_{XX}(\omega)$
$R_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2\, R_{XX}(\omega)$

*) $E[|Y(t)|^2] = r_{YY}(0) = \int_{\mathbb{R}} |H(\omega)|^2 R_{XX}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$

Systemtheorie II

Verteilungen

Gleichverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$
$$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\phi_X(s) = \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}$$

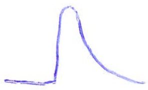
Normalverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2$$
$$\phi_X(s) = e^{s\mu + \frac{s^2\sigma^2}{2}}$$

Lognormalverteilung:

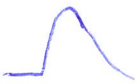
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot u(x)$$



$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}$$
$$Var[X] = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

Rayleigh-Verteilung:

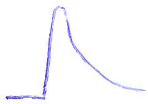
$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x)$$



$$E[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma$$
$$Var[X] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$
$$\phi_X(s) = 1 + s\sqrt{2\pi}\,\sigma e^{s^2\sigma^2/2}\left[1 - Q(s\sigma)\right]$$

Chi-Quadrat-Vert. mit n Freiheitsgraden

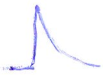
$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^n} x^{n/2 - 1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} u(x)$$



$$E[X] = n \cdot \sigma^2$$
$$Var[X] = 2n\sigma^4$$
$$\phi_X(s) = (1 - 2s\sigma^2)^{-n/2}$$

Exponential-Vert.:

$$f_X(x) = a \cdot e^{-ax} \cdot u(x)$$



$$E[X] = \frac{1}{a}$$
$$Var[X] = \frac{1}{a^2}$$
$$\phi_X(s) = \frac{a}{a-s}$$

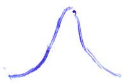
Laplace-Verteilung:

$$f_X(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}$$

$$E[X] = 0$$
$$Var[X] = \frac{2}{a^2}$$
$$\phi_X(s) = \frac{a^2}{a^2 - s^2}$$

Cauchy-Vert.:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-\mu)^2}$$



$$E[X] = \mu$$
$$Var[X] = \infty$$
$$\phi_X(s) = e^{s\mu - a|s|}$$

Bernoulli:

$$P(X=k) = \begin{cases} 1-p & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$$
$$E[X] = p$$
$$Var[X] = p(1-p)$$
$$\phi_X(s) = 1 - p + pe^s$$

Binomial

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$E[X] = n \cdot p$$
$$Var[X] = np(1-p)$$
$$\phi_X(s) = (1 - p + pe^s)^n$$

Poisson

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$
$$E[X] = a$$
$$Var[X] = a$$
$$\phi_X(s) = e^{a(e^s - 1)}$$

Bivariate Normalverteilung

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right)$$

Multivariate ":

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \underline{\underline{C}})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})^T \underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{x} - \underline{\mu})\right)$$

$X(t)$ Gauß-Prozess

$\rightarrow X(t) \sim N(\mu_X(t), C_{XX}(0))$

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2}} f_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$F = F_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$